

۱. مسأله زیر را در نظر بگیرید:

$$\min g(x_1, \dots, x_5) = \max\{p_j x_j : j = 1, \dots, 5\}$$

در تبدیل این مسأله به فرم خطی حداکثر چند محدودیت و چند متغیر تصمیم به مسأله اضافه می شود؟ (به ترتیب

از راست به چپ) / **مبحث مدلسازی**

1,6 (۴)                      2,5 (۳)                      2,6 (۲)                      1,5 (۱)

۲. مسأله زیر را در نظر بگیرید، کدام گزینه صحیح است؟ / **مبحث روش ترسیمی**

$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 &\leq 50 \\ 2x_1 + x_3 &\leq 40 \\ x_j &\geq 0 \end{aligned}$$

(۱) مسأله نشدنی است.                      (۲) مسأله جواب بهینه بی کران دارد.

(۳) مسأله جواب بهینه چندگانه دارد.                      (۴) مسأله جواب بهینه تباهیده دارد.

۳. در مدل زیر کدام متغیرها نمی توانند هم زمان با هم پایه ای باشند؟ / **مبحث سیمپلکس**

$$\begin{aligned} \min z &= 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &\leq 18 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 &\leq 26 \\ \frac{3}{2}x_1 + x_4 &\leq 21 \\ x_j &\geq 0 \end{aligned}$$

(۱)  $x_1, x_3, x_4$                       (۲)  $x_2, x_4$                       (۳)  $x_2, x_3$                       (۴)  $x_2, x_3, x_4$

۴. مقدار بهینه تابع هدف مسأله زیر کدام است؟ **مبحث سیمپلکس**

$$\max z = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_5 + 3x_6$$

$$3x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 4x_6 \leq 12$$

$$0 \leq x_j \leq 1$$

$$\frac{40}{3} \text{ (۴)}$$

$$\frac{46}{4} \text{ (۳)}$$

$$14 \text{ (۲)}$$

$$\frac{38}{4} \text{ (۱)}$$

۵. مسأله زیر را در نظر بگیرید، نقطه  $(10, 10)$  برای این مسأله چه نقطه‌ای است؟ **مبحث سیمپلکس**

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \geq 0$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \geq 3$$

$$x_j \geq 0$$

(۲) موجه، اساسی و بهینه

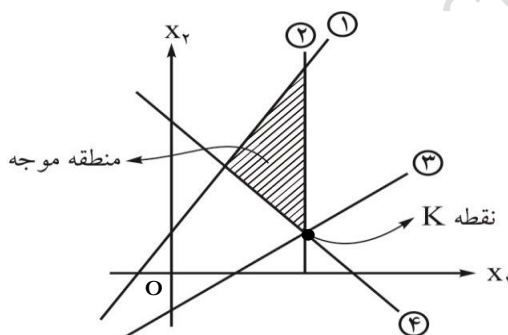
(۱) موجه، اساسی

(۴) موجه اساسی و غیر بهینه

(۳) موجه، غیر اساسی

۶. شکل زیر مربوط به یک مدل برنامه ریزی خطی

می‌باشد.



کدام یک از گزینه‌ها در مورد وضعیت متغیرها به غیر از

متغیرهای تصمیم در نقطه K صحیح است؟ **مبحث سیمپلکس**

$$s_3 = s_4 > 0 \quad s_1 = s_2 = 0 \text{ (۱)}$$

$$s_2 = s_3 = s_4 = 0, s_1 > 0 \text{ (۲)}$$

$$s_4 > 0 \quad s_3 = s_2 = 0 \quad s_1 < 0 \text{ (۳)}$$

$$R_4 = s_4 = s_3 = s_2 = s_1 = 0 \quad (۴)$$

۷. میزان تغییر مقدار تابع هدف در تابع حداکثر سازی در هر تکرار جدول سیمپلکس به اندازه

$x = (c_j - z_j) \frac{b_i}{a'_{ij}}$  است اگر جدول حالت تبهگن داشته باشد، کدام گزینه صحیح است؟ **مبحث**

**سیمپلکس**

$$x < 0 \quad (۲)$$

$$x > 0 \quad (۱)$$

(۴) نمی توان اظهار نظر کرد.

$$x = 0 \quad (۳)$$

۸. مسأله زیر را در نظر بگیرید: **مبحث سیمپلکس**

$$\max z = 8 + 3x_2 + 2s_1$$

$$x_1 - 2x_2 + s_1 = 8$$

$$-\frac{2}{3}x_2 + s_2 = 7$$

$$x_j \geq 0$$

(۲) مسأله تبهگن است.

(۱) مسأله بهینه چندگانه است.

(۴) مسأله جواب ندارد.

(۳) مسأله جواب نامحدود دارد.

۹. جدول سیمپلکس زیر که مربوط به یک مسأله مینیمم سازی می باشد را در نظر بگیرید: **مبحث سیمپلکس**

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$x_1$	1	2	5	2	0	0	5
$x_5$	0	a	3	3	1	0	3
$x_6$	0	-1	0	2	0	1	b
$z$	0	2	c	-1	0	0	-1

اگر  $b=2$  باشد و بخواهیم  $x_4$  را وارد پایه کنیم، آن گاه .....

(۱) جدول بعد تباهیده و تعداد تابع هدف بهتر خواهد شد.

(۲) جدول بعد تباهیده و تعداد تابع هدف بدتر خواهد شد.

(۳) جدول بعد ناتباهیده و مقدار تابع هدف بهتر خواهد شد.

(۴) جدول بعد ناتباهیده و مقدار تابع هدف بدتر خواهد شد.

۱۰. یک شرکت محصول مونتاژی را به ترکیب ۲ واحد A و ۳ واحد B را با هدف حداکثر کردن تعداد فروش، تولید می کند. از طرفی از نظر میزان قطعات A, B شرطی وجود دارد بر مبنی این که تعداد قطعات A نسبت به مجموع

قطعات حداکثر ۴۰٪ است. مدل خطی فوق در کدام گزینه قرار دارد؟ **مبحث مدل سازی**

$$\max z = \min \left\{ \frac{x_A}{2}, \frac{x_B}{3} \right\} \quad (۲) \qquad \max z = 0.4 \min \left\{ \frac{x_A}{2}, \frac{x_B}{3} \right\} \quad (۱)$$

$$0.6x_A \leq 0.4x_B$$

$$\max z = y$$

$$x_A - 2y \geq 0$$

$$x_B - 3y \geq 0 \quad (۴)$$

$$6x_A \leq 4x_B$$

$$\max z = y$$

$$2y - x_A \geq 0$$

$$3y - x_B \geq 0 \quad (۳)$$

$$6x_A \leq 4x_B$$

۱۱. یک رژیم غذایی شامل دو ماده A و B می باشد. اگر میزان ویتامین موجود در هر گرم ماده A، ۷۰ و در هر

گرم ماده B، ۳۰ واحد و میزان پروتئین موجود در هر گرم ماده A و B، به ترتیب ۱۰ و ۱۵ واحد باشد، در صورتی که

حداقل احتیاج روزانه به ویتامین ۳۰۰ باشد و همچنین مجاز به استفاده بیش از ۲۵۰ واحد پروتئین نباشد،

محدودیت های مدل کدامند؟ **مبحث مدل سازی**

$$\begin{cases} 70A + 30B \geq 300 \\ 10A + 15B \leq 250 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} 70A + 15B \leq 300 \\ 10A + 30B \geq 250 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} 70A + 30B \leq 300 \\ 10A + 15B \geq 250 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 70A + 10B \geq 30 \\ 30A + 15B \leq 250 \end{cases} \quad (3)$$

۱۲. مسأله زیر را در نظر بگیرید اگر بخواهیم با کمترین تعداد متغیر مصنوعی مسأله را با M بزرگ حل کنیم

کدام گزینه صحیح است؟ **مبحث سیمپلکس**

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 0$$

$$x_1 - 2x_2 \leq -6$$

$$2x_1 + x_2 = 10$$

(۱) در تکرار اول  $x_1$  وارد و  $R_1$  خارج می شود. (۲) در تکرار اول  $x_1$  وارد و  $R_3$  خارج می شود.

(۳) در تکرار اول  $x_2$  وارد و  $R_2$  خارج می شود. (۴) در تکرار اول  $x_2$  وارد و  $R_3$  خارج می شود.

۱۳. اگر تولید محصول A، ۲ برابر محصول B و ثلث محصول C از مواد اولیه استفاده کند، در این شرایط

محدودیت تولید این سه محصول در شرایطی که اگر تمام منابع را برای B استفاده می کردیم می توانستیم

از آن ۱۰۰ واحد تولید کنیم، کدام گزینه است؟ **مبحث مدلسازی**

$$2A + B + 6C \leq 200 \quad (2)$$

$$A + \frac{1}{2}B + 3C \leq 100 \quad (4)$$

$$4A + 2B + 12C \leq 200 \quad (1)$$

$$2A + B + \frac{2}{3}C \leq 100 \quad (3)$$

## پاسخ نامه :

۱. گزینه «۱» (متوسط)

$$\begin{aligned} \min g(x_1, \dots, x_5) &= y \\ P_j x_j &\leq y \\ j &= 1, \dots, 5 \end{aligned}$$

پس یک متغیر  $y$  و حداکثر ۵ محدودیت جدید به مسأله بایستی اضافه کرد تا مدل را به حالت خطی تبدیل کنیم.

۲. گزینه «۲» (ساده)

زمانی که اعداد سمت راست و مقدار متغیرهای  $x_j$  بزرگتر مساوی صفر است و محدودیت‌ها نیز کوچکتر مساوی باشد، آن‌گاه اگر ضریب یکی از متغیرها در تمام محدودیت‌ها صفر و منفی باشد، آن متغیر به سمت مثبت بی‌نهایت محدود است، در این سؤال متغیر  $x_2$  چنین شرایطی دارد، پس:

$$x_2 \rightarrow +\infty \Rightarrow \min z \rightarrow -\infty$$

به عبارتی مقدار تابع را باعث شد به سمت بی‌نهایت برود و مسأله دارای جواب بی‌کران شد.

۳. گزینه «۳» (سخت)

چون ستون دو متغیر  $x_2$  و  $x_3$  نسبت به هم وابستگی خطی دارند پس این دو متغیر قطعاً با هم اساسی نخواهند شد.

۴. گزینه «۴» (ساده)

با توجه به نسبت ضریب تابع به ضریب محدودیت به ترتیب تا اتمام کل منبع تولیدی متغیرهای  $x_1, x_3, x_5$  و  $x_6$  مقدار دریافت می کنند:

$$x_5 = 1 \quad / \quad x_3 = 1 \quad / \quad x_1 = \frac{2}{3} \quad / \quad x_6 = 1$$

$$z = 2\left(\frac{2}{3}\right) + 0 + 4(1) + 0 + 5(1) + 3(1)$$

$$z = \frac{40}{3}$$

۵. گزینه «۱» (ساده)

$$1 + 2 \times 0 - 1 + 0 = 0$$

$$2 \times 1 + 3 \times 0 + 1 - 0 = 3$$

$$x_1 = 1 > 0$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 1 > 0$$

$$x_4 = 0$$

پس جواب موجه است از طرفی چون دترمینان  $x_1$  و  $x_3$  غیر صفر است به هم وابستگی نداشته و می توانند اساسی باشند و از طرفی با توجه به نبود تابع هدف در مورد بهینگی نمی توان نظری داد.

۶. گزینه «۲»

نقطه K روی معادله حدی محدودیتهای دوم و سوم و چهارم می باشد پس متغیرهای کمکی و مصنوعی مربوط به این سه محدودیت صفر می باشد از سوی دیگر نقطه K در منطقه مورد قبول محدودیت اول می باشد (و نه روی معادله حدی آن) پس متغیرهای کمکی و احتمالاً مصنوعی محدودیت اول باید غیر صفر باشد.

ضمناً با توجه به منطقه موجه مدل، محدودیتهای اول و دوم و سوم به شکل  $\leq$  بوده و فقط به S نیاز دارند و محدودیت چهارم به شکل  $\geq$  است که هم به S و هم به R نیاز دارد.

خلاصه آنکه مسئله چهار متغیر کمکی S و یک متغیر مصنوعی R دارد که برای محدودیت چهارم می باشد. و در نقطه K،  $s_2 = s_3 = s_4 = 0 = R_4$  بوده و  $s_1 > 0$  می باشد.

۷. گزینه «۴» (متوسط)

قطعاً در تابع حداکثر سازی با تکرار جدول مقدار تابع هدف کم تر نخواهد شد، پس گزینه «۲» نادرست است، اما در مورد گزینه های ۱ و ۳ نمی توان اظهار نظر کرد چرا که ممکن است حالتی در تبهگن بین این جدول های خاص به علت تبهگنی پیش آمده باشد که مقدار تابع هدف تغییر نکند یعنی جدول مورد نظر دارای سمت راست  $(b_i)$  صفر باشد که در این صورت مقدار تابع رشدی نخواهد داشت.

۸. گزینه «۳» (متوسط)

بایستی مدل را به حالت جدول تبدیل کنیم:



$$\begin{array}{l|cccc|c} \max z - 3x_2 - 2s_1 = 8 & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \\ x_1 - 2x_2 + s_1 = 8 & z & 0 & -3 & -2 & 0 & 8 \\ -\frac{2}{3}x_2 + s_2 = 7 & x_1 & 1 & -2 & +1 & 0 & 8 \\ & s_2 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 1 & 7 \end{array}$$

همان طور که می بینید متغیر  $x_2$  ورودی بوده و از طرفی ستون زیر آن نیز تماماً منفی است که نماد منطقه نامحدود

است پس در نتیجه جواب مسئله بی کران خواهد بود.

۹. گزینه «۲» (ساده)

از آن جایی که  $x_4$  شرط ورود به پایه را ندارد پس جدول بعد مقدار تابع هدفش بدتر خواهد شد.

و از آن جایی که با ورود  $x_4$  به پایه هردو متغیر  $x_5$  و  $x_6$  شرط خروج را دارند، جدول بعد حتماً تبهگن خواهد شد.

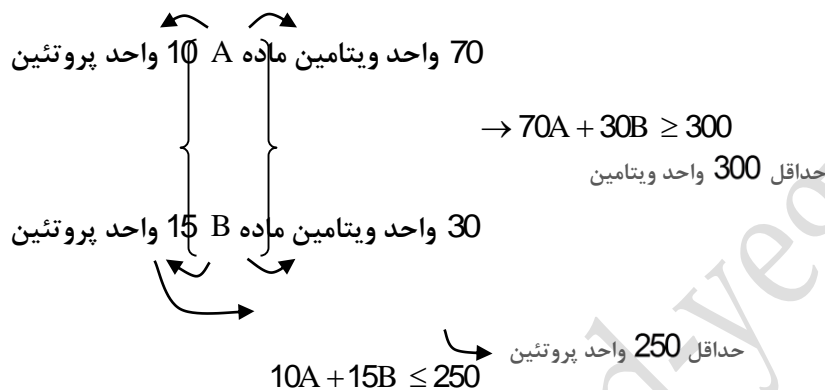
۱۰. گزینه «۴» (ساده)

$$\begin{array}{l} \max (\text{عدد}) = \min \left\{ \frac{x_A}{2}, \frac{x_B}{3} \right\} \\ \frac{x_A}{x_A + x_B} \leq 0.4 \end{array} \xrightarrow{\text{حالت خطی}} \begin{array}{l} \max z = y \\ \frac{x_A}{2} \geq y \\ \frac{x_B}{3} \geq y \\ x_A \leq 0.4(x_A + x_B) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \max z = y \\ x_A - 2y \geq 0 \\ x_B - 3y \geq 0 \\ 0.6x_A \leq 0.4x_B \rightarrow 6x_A \leq 4x_B \end{array}$$

تذکر: از آن جا که اشاره شده است مدل در حالت خطی باشد، بایستی تابع مونتاژ که یک تابع مرکب است را از حالت مرکب خارج کنیم.

۱۱. گزینه «۲» (متوسط)



۱۲. گزینه «۳» (سخت)

چون حداقل تعداد متغیر مصنوعی را می خواهیم می توان محدودیت اول را در یک منفی ضرب کرد چرا که سمت راست منفی نمی شود و محدودیت کوچک تر مساوی نیازی به متغیر مصنوعی هم نخواهد داشت، از طرفی چون سمت راست محدودیت دوم منفی است آن را در منفی ضرب می کنیم تا مثبت شود.

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + x_2 \\ -x_1 - 2x_2 &\leq 0 \\ -x_1 + 2x_2 &\geq 6 \\ 2x_1 + x_2 &= 10 \end{aligned}$$

حال می‌دانیم که در مسائل  $M$  بزرگ در جدول اول متغیری ورودی است که مجموع ضرایب آن در محدودیت‌های  $\geq$  و  $=$  بیش‌تر باشد که در حال حاضر مجموع ضرایب  $x_2$ ، ۱ است پس  $x_2$  وارد می‌شود و طبق قاعده  $\min$  نسبت،  $R_2$  خارج خواهد شد.

۱۳. گزینه «۱» (سخت)

$$\begin{array}{l} A = 2B \\ A = \frac{1}{3}C \end{array} \xrightarrow[\text{تولید}]{\text{تبدیل به نسبت}} \begin{array}{l} A = \frac{1}{2}B \\ A = 3C \end{array} \left| \begin{array}{l} A = 50 \\ B = 100 \\ C = \frac{50}{3} \end{array} \right.$$

که فقط در گزینه «۱» چنین شرایطی داریم.

در نوشتن محدودیت‌های زمان و مواد اولیه وقتی سؤال بیان می‌کند که محصول  $A$ ، ۲ برابر  $B$  و ثلث  $C$  از مواد اولیه استفاده می‌کند گزینه‌ای درست است که ضریب  $2A$  برابر ضریب  $B$  و ثلث  $C$  باشد. اگر بیش از یک گزینه چنین شرایطی داشت گزینه‌ای درست است که مقدار تولید محصول  $B$  آن ۱۰۰ واحدی باشد که در صورت سؤال آمده است (که در این سؤال گزینه‌های ۱ و ۳ و ۴ چنین شرایطی دارند و مقدار تولید  $B$  فقط در گزینه ۱ درست است)

مسعود یگانه